06 点列コンパクト

実数の性質シリーズ

$n=1$ または 2 とする．$\mathbb{R}^n$ の点 A と $\varepsilon>0$ に対して，

$\{X \in \mathbb{R}^n|\ \ |X-A|<\varepsilon\}$

を A の ε 近傍といい，$U_\varepsilon(A)$ とかく．また，$\mathbb{R}^2$ における $K \subset \mathbb{R}^n$ の補集合を K^c とかく．

$n=1$ のとき，$U_\varepsilon(a)$ は開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ を意味し，$n=2$ のとき，$U_\varepsilon(A)$ $(A=(a,b))$ は開円板 $\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}$ を意味する．

定義 (境界点, 内点, 外点)

(1) K を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$\mathbb{R}^n$ の点 A が K の境界点であるとは，A のどんな近くにも K の点も，K^c の点も存在すること，すなわち

任意の $\varepsilon>0$ に対して，$U_\varepsilon(A)\cap K \neq \varnothing$ かつ $U_\varepsilon(A)\cap K^c \neq \varnothing$

が成り立つことである．K の境界点全体のなす集合を K の境界といい，∂K と表す．

(2) A が K の内点であるとは，A の近くに K^c の点が存在しないこと，すなわち

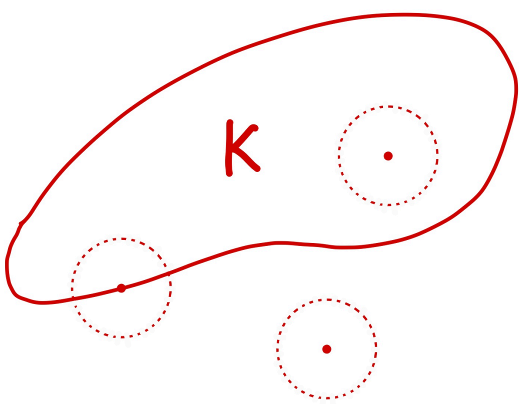
ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U_\varepsilon \subset K$

が成り立つことである．

(3) A が K の外点であるとは，A の近くに S の点が存在しないこと，すなわち

ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U_\varepsilon \subset K^c$

が成り立つことである．



$\mathbb{R}^n$ の任意の点は K の境界であるか，内点であるか，外点であるかのどれか 1 つだけが成り立つ． 境界 ∂K が K に含まれるか，あるいは ∂K と K が共通部分を持たないかによって，閉集合・開集合を定義することにする．

定義 (閉集合・開集合)

(1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K が**閉集合**であるとは，$\partial K \subset K$ の成り立つことをいう．

(2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K が**開集合**であるとは，$\partial K \cap K=\varnothing$ となることをいう．

(例)(1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$ の境界 ∂K は x 軸 $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$ であり，$\partial K\cap K=\varnothing$ であるから K は開集合である．
□

(例)(2) $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間 $K=[a,b]$ について，$\partial K=\{a,b\}$ であり，$\partial K\subset K$ であるから K は閉集合である． □

(例)(3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqq 1, y\neq 1\}$ は開集合でも，閉集合でもない．実際， 境界点 $(0,1)$ は K に属さないので K は閉集合ではない．また，境界点 $(1,0)$ は K に属するので K は開集合でもない． □

(例)(4) $\mathbb{R}^2$ において，$\partial\mathbb{R}^2=\varnothing$ であるから，$\mathbb{R}^2$ 自身は開集合でも閉集合でもある． □

定理 05

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 K に対して，次を示せ．

(1) K が開集合である $\Leftrightarrow$ K の点がすべて内点である

(2) K が閉集合である $\Leftrightarrow$ K の収束点列の極限はすべて K の点である

(証明)(1) K が開集合

$\Leftrightarrow$ K の境界点は K に含まれない

$\Leftrightarrow$ 「$A\in\partial K \Rightarrow A\notin K$」

$\Leftrightarrow$ 「$A\in K \Rightarrow A\notin\partial K$」

$\Leftrightarrow$ 「$A\in K \Rightarrow$ ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U_\varepsilon(A)\cap A=\varnothing$ または $U_\varepsilon(A)\cap K^c=\varnothing$」

$A\in K$ と仮定したときに $A\in U_\varepsilon(A)\cap K\neq\varnothing$ であるから，最後の条件は

「$A\in K \Rightarrow$ ある $\varepsilon>0$ が存在して，$U_\varepsilon(A)\cap K^c=\varnothing$」

となる．これは$U_\varepsilon(A)\subset A$を意味するから，$A$は内点である．

$(\Rightarrow)$ (1) Kが閉集合

$\Leftrightarrow$ Kの境界点はKに含まれる

$\Leftrightarrow$ 「$A\in\partial K\Rightarrow A\in K$」…①

一方，「Kの収束点列の極限はすべてKの点である」 $\Leftrightarrow$ 「Kの収束点列の極限がA $\Rightarrow$ $A\in K$」

(Aに収束するKの点列があるとは，Aのいくらでも近くにKの点がある*ことを意味するから)

$\Leftrightarrow$ 「AはKの境界点または内点$\Rightarrow A\in K$」

$\Leftrightarrow$ 「$A\in\partial K\cup K \ \Rightarrow A\in K$」

結論の形$A\in K$から，この仮定$A\in\partial K\cup K$は$A\in\partial K$に変えても同じことである．よってこれは①と同値である． □

定義 (点列コンパクト)

$\mathbb{R}^n$の部分集合Kは，Kの任意の点列がKの点に収束する部分列を含むとき，点列コンパクトという．

(例)(5) $\mathbb{R}$において，有界閉区間$K=[a,b]$は点列コンパクトである．実際，Kの点列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$をとると，定理03(ボルツァーノ-ワイヤストラス)により，収束部分列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$が存在する．極限値を$\alpha$とおけば，$a\leqq\alpha\leqq b$である†から，任意に作った$K$の点列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$から$K$の元$\alpha$に収束する部分列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$が構成できる．すなわち，$K$は点列コンパクトである． □

定理 06

$\mathbb{R}^n$の部分集合Kに対し，次のことが成り立つ．

Kが点列コンパクト$\Leftrightarrow$ Kは有界閉集合

(証明) $(\Rightarrow)$ Kが有界でないとすると，任意の自然数nに対し，$|A_n|>n$となるKの点A_nが存在する．各nに対してこのようなA_nを定めるとき，Kの点列$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ができるが，この点列のどんな部分列$\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$も$|a_{n_k}|\to\infty(k\to\infty)$となり，収束しない．これは$K$が点列コンパクトであることに反するから，$K$は有界である．任意の$K$の収束点列$\{A_n\}$を考え，その極限を点$A$とする．ここで$K$が点列コンパクトであるから，$\{A_n\}$の部分列で，$K$の点$A'$に含まれるものを作ることができるが，$\{A_n\}$は$A$に収束するのであったから，$A=A'\in K$となる．よって任意の$K$の収束点列の極限が成り立つから，$K$は閉集合である (定理05 (2))．

$(\Leftarrow)K$ の任意の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．Kが有界であるから，定理 03 により，収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をもつ．K は閉集合であるから，$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$の極限$A$は$K$に含まれる (定理05(2))．ゆえに点列$\{A_n\}$は$K$の点$A$に収束する部分列をもつから$K$は点列コンパクトである． □

*任意の$\varepsilon>0$に対して$U_\varepsilon(A)\cap K\neq\varnothing$

†すべてのkで$a\leqq a_{n_k}\leqq b$であり，$k\to\infty$とすれば得られる

～演習問題～

06-1 $\mathbb{R}^2$の部分集合$K=\left\{\left(x,\sin\dfrac{1}{x}\right)\middle|\, x>0\right\}$において，原点$O$が$K$の境界点であることを示せ．

06-2 $\mathbb{R}^n$の部分集合Kに対して，次を示せ．

Kが閉集合である$\Leftrightarrow$ K^cが開集合である

(06-1) y座標が0になる点でいくらでもx座標が0に近いものが存在することを示せばよい．任意の$\varepsilon>0$に対して，$x=\dfrac{1}{n\pi}<\varepsilon$となるように整数$n$を定めると，点$\left(x,\sin\dfrac{1}{x}\right)=(x,0)$は$U_\varepsilon(O)$に属する．よって任意の$\varepsilon>0$に対して$U_\varepsilon(O)$には$K$の点も$K^c$の点 (例えば原点$O$) も含まれるから，$O$は$K$の境界点である．

(06-2) Kが閉集合

$\Leftrightarrow$ 「$A\in K^c\Rightarrow A\notin\partial K$」

$\Leftrightarrow$「$A\in K^c\Rightarrow$ ある$\varepsilon>0$が存在して，$U_\varepsilon(A)\cap K=\varnothing$または$U_\varepsilon(A)\cap K^c=\varnothing$」

$A\in K^c$と仮定したときに$A\in U_\varepsilon(A)\cap K^c\neq\varnothing$であるから，最後の条件は

「$A\in K^c\Rightarrow$ ある$\varepsilon>0$が存在して，$U_\varepsilon(A)\cap K=\varnothing$」

となる．これはAがK^cの内点であること，すなわちK^cが開集合であることを意味する (定理05(1) を使った)．