05 コーシー列

実数の性質シリーズ

定義 (コーシー列)

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列 (または基本列) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$m, n \geqq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$

となることをいう．

任意の収束する数列はコーシー列である．実際，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束するとすれば，

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_m)| \leqq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n|$$

により，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 N が存在して $m, n \geqq N$ ならば右辺の和は ε 未満にできる．逆に，任意のコーシー列は収束する．これを実数の完備性という．

定理 04 (実数の完備性)

コーシー列は収束する．

(証明) まずコーシー列 $\{a_n\}$ が有界数列であることを示す．コーシー列であるから，ある番号 N_1 が存在し，

$m, n \geqq N_1$ ならば $|a_m - a_n| < 1$

が成り立つ．したがって $n \geqq N_1$ ならば

$$|a_n| \leqq |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| < 1 + |a_{N_1}|$$

である．

$$M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_1 - 1}|, |a_{N_1}| + 1|\}$$

とおくと，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leqq M$ が成り立つから，$\{a_n\}$ は有界数列である．したがって，定理 03(ボルツァノ-ワイヤストラス) により，$\{a_n\}$ のある収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．$\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ とおく．以下では $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示す．

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．ある番号 K が存在し，$k \geqq K$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．$\{a_n\}$ がコーシー列であるから，ある番号 N' が存在し，$m, n \geqq N'$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ である．$N = \max\{K, N'\}$ とおく．$n_N \geqq N$ に注意する．$n \geqq N$ ならば

$$|a_n - \alpha| \leqq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が得られる．これは $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示す．　□

～演習問題～

05-1 (1) 数列 $\{a_n\}$ について，ある定数 r $(0 < r < 1)$ が存在して，

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq r|a_{n+1} - a_n| \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき，$\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ．

(2) フィボナッチ数列

$$b_1 = b_2 = 1, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$$

の隣り合う項の比を $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ とおくとき，b_n がコーシー列であることを示せ．

05-2 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ から，新しい数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$s_1 = a_1,$

$s_2 = a_1 + a_2,$

$\cdots$

$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$

$\cdots$

によって定義する．この数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を第 n 項とする級数といい，その第 n 項 s_n をこの級数の第 n 部分和という．もし極限

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

が存在すれば，この級数は収束するといい，s をその和という．級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ のように表すことが多い．次のことを示せ．

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束すれば，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという．)

05-3 点列 $A_n = (a_n, b_n)$ がコーシー列であることは，数列の場合と同様に定義される．すなわち，

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$n, m \geqq N$ ならば $|A_m - A_n| < \varepsilon$

となるとき，点列 A_n はコーシー列という．

点列 A_n がコーシー列であることと，「数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ がそれぞれコーシー列であること」が同値であることを示せ．

(05-1) 与えられた条件から $|a_{n+1}-a_n| \leqq r^{n-1}|a_2-a_1|$ となる．$m>n$ となる自然数 m,n に対し，三角不等式を用いれば
$|a_m-a_n|$
$\leqq |a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$
$\leqq (r^{m-2}+r^{m-3}+\cdots+r^{n-1})|a_2-a_1|$
$\leqq \dfrac{r^{n-1}(1-r^{m-n})}{1-r} < \dfrac{r^{n-1}}{1-r}|a_2-a_1| \cdots$①
$0<k<1$ であるから，よってある N があって，$n \geqq N$ ならば ε 未満にできる．よって $m,n \geqq N$ ならば $|a_m-a_n|<\varepsilon$ とできる． (2) 漸化式より，b_n は常に 1 以上 (とくに正) である．与えられた漸化式を ${b_{n+1}}^2$ でわって $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ を得る．ここで $|a_{n+1}-a_n| = \left|\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)-\left(1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)\right| = \dfrac{|a_n-a_{n-1}|}{a_{n-1}a_n}\cdots$②． a_n の漸化式は $a_{n+1}a_n=a_n+1$ とも表される．ここで a_n の漸化式から常に $a_n =\geqq 1$ となるから，すべての n で $a_{n+1}a_n \geqq 2$ となる．よって②の右辺 $\leqq \dfrac{1}{2}|a_n-a_{n-1}|$ となる．したがって，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (1) の仮定をみたすから，コーシー列である． (05-2) $s_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|, s'_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく．s_m-s_n は $m<n$ のとき $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$ を意味する．ここで $|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n| \leqq |a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots|a_n|$ であるから，$s'_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ が収束する，すなわちコーシー列であるとき，$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ もコーシー列となる．よって s_n は収束する．(05-3) 演習 04-2 と同様．$|a_m-a_n|=\sqrt{(a_m-a_n)^2} \leqq \sqrt{(a_m-a_n)^2+(b_m-b_n)^2}=|A_m-A_n|$ により，A_n がコーシー列ならば $\{a_n\}$ もコーシー列となる．$\{b_n\}$ も同様．また，$\{a_n\},\{b_n\}$ がコーシー列のとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある番号 N_a, N_b があって，$m,n \geqq N_a$ ならば $|a_m-a_n|<\varepsilon$, $m,n \geqq N_b$ ならば $|b_m-b_n|<\varepsilon$ となる．よって $N=\max\{N_a,N_b\}$ とおくと，$m,n \geqq N$ ならば $|A_m-A_n|=\sqrt{(a_m-a_n)^2+(b_m-b_n)^2}<\sqrt{2}\varepsilon$ となる．よって点列 $\{A_n\}$ はコーシー列である．