# 04 有界数列の性質

実数の性質シリーズ

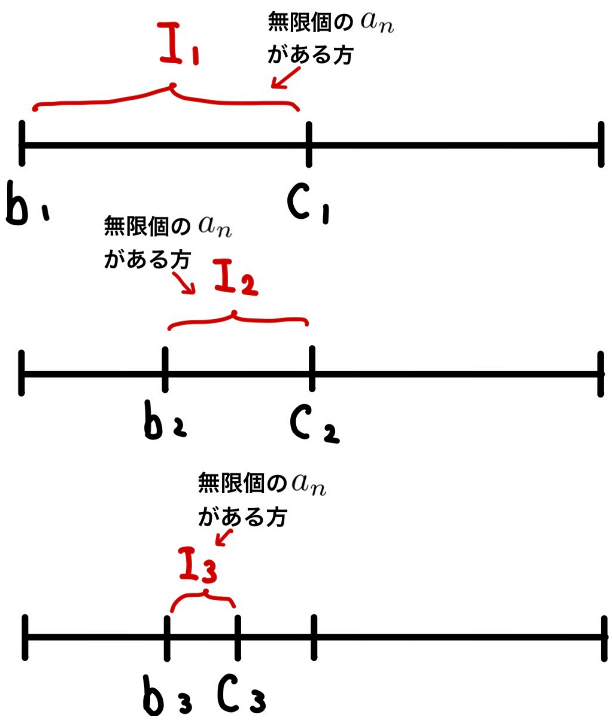
数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，
$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$
となる自然数 $n_k$ に対する数列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を，$\{a_n\}$ の部分列という．

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha$ に収束するならば，その任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ も収束し，
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$
となる (演習 04-1).

**定理 03 (ボルツァーノ-ワイヤストラスの定理)**

有界実数列は，収束部分列を含む．

(証明) 有界数列であるから，ある有界閉区間 $I_0 = [b, c]$ で，$\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset I_0$ をみたすものがとれる．$I_0$ を中点を境にして 2 つの区間 $[b, \frac{b+c}{2}], [\frac{b+c}{2}, c]$ に分けたとき，少なくとも一方は $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の無限個の元を含む (重複も含める)．無限個の元を含む区間の一つをとり，それを $I_1$ とおく．続いて $I_1$ についても同様に中点を境にして 2 つの区間に分け，$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の無限個の元を含む区間の一つをとり，$I_2$ とおく．このようにして $I_3, I_4, \cdots$ をつくる．$I_n = [b_n, c_n]$ とおく．
区間の定め方から
$$b_0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots$$
$$c_0 \geqq c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots \geqq c_n \geqq \cdots$$
である．したがって，定理 02 により $\alpha = \lim_{n\to\infty} b_n, \beta = \lim_{n\to\infty} c_n$ が存在する．さらに，
$$c_n - b_n = \frac{1}{2}(c_{n-1} - b_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^n}(c_0 - b_0)$$
である．よって
$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(c_0 - b_0) = 0$$
であるから，$\alpha = \beta$ となる．
さて，$I_1$ には $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ の無限個の元が含まれているので，そのうちの一つを $a_{n_1}$ とおく．$I_2$ にも $\{a_n | \in \mathbb{N}\}$ の無限個の元が含まれているので，そのうち添字が $n_1$ よりも大きいものを $a_{n_2}$ とおく．$I_3$ にも $\{a_n | \in \mathbb{N}\}$ の無限個の元が




含まれているので，添字が $n_3$ よりも大きいものを $a_{n_3}$ とおく．以下同様にして $a_{n_4}, a_{n_5}, \cdots$ をとる．$a_{n_k} \in I_k = [b_k, c_k]$ であり，$\alpha \in [b_k, c_k]$ であるから，
$$|a_{n_k} - \alpha| \leqq c_k - b_k = \frac{1}{2^k}(c_0 - b_0) \to 0 (k \to \infty)$$
である．ゆえに，$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{a_n\}$ の収束部分列である． □

(例)(1) 数列 $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である．収束部分列としては，例えば $\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$，$\{a_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ がとれる． □

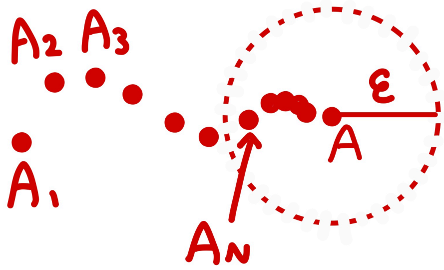
2 変数関数 $f(x, y)$ の議論にも対応できるように，数直線上の議論を平面上に拡張する．2 つの実数に順番をつけて並べた $(x, y)$ の全体
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$
を平面といい，平面の元を点という．以下，平面での点列*の極限について，必要な定義を述べる．
平面上の点 $(a, b)$ に対して，$A$ と原点 $O = (0, 0)$ の距離は
$$\sqrt{a^2 + b^2}$$
で定義され，これを $|A|$ と表す．平面上の 2 点 $A = (a, b), B = (a', b')$ の距離は

*数直線上の場合は数列と呼んだが，平面の場合は点列と呼ばれる

$\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$
で定義され，これを $|A-B|$ と表す．ここで $A-B$ は $A-B=(a-a',b-b')$ というように対応する成分同士の差として定義される．
距離が定義されたら，数列の場合と同様に点列の極限が定義できる．

定義 (点列の極限)

点列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $A$ に収束するとは，どんな正数 $\varepsilon>0$ に対しても，ある自然数 $N$ が存在して，
$n \geqq N$ ならば $|A_n-A|<\varepsilon$
となることをいう．




点列 $A_n=(a_n,b_n)$ が $A=(a,b)$ に収束することと,「数列 $a_n$ が $a$ に収束し，かつ，数列 $b_n$ が $b$ に収束すること」は同値である (演習 04-2).
集合 $K\subset\mathbb{R}^2$ が有界であるとは，ある定数 $R$ が存在して，$K$ の任意の点 $A$ に対して，$|A|<R$ となることである．

定理 03 の拡張

$K$ は $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする．$K$ の任意の点列は収束部分列を含む．

(証明)$A_n=(a_n,b_n)\in K$ とする．$K$ は有界であることから，ある定数 $R$ が存在して，すべての $n$ で $|A_n|<R$ となる．このとき $|a_n|,|b_n|\leqq\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}=|A_n|<R$ により，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ有界である．定理 03 により，$\{a_n\}$ は収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をもつ．この極限を $a$ とおく．ここで，$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界数列であるから再び定理 03 により，収束部分列 $\{b_{n_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ をもつ．この極限を $b$ とおく．数列 $\{a_{n_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ は収束列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列であるから $a$ に収束する (演習 04-1)．よって $\{a_{n_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}},\{b_{n_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ $a,b$ に収束する．これは $A_n$ が $(a,b)$ に収束することを意味する (演習 04-2). □

～演習問題～

04-1 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\alpha$ に収束するならば，その任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ も収束し，
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}a_{n_k}$$
となる．

04-2 点列 $A_n=(a_n,b_n)$ が $A=(a,b)$ に収束すること (すなわち $|A_n-A|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$ という数列が 0 に収束すること) と,「数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ がそれぞれ $a,b$ に収束すること」は同値であることを示せ．

(04-1) 仮定により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある番号 $N$ がとれ，$n\geqq N$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ となる．一般に $n_k\geqq k$ であるから，$k\geqq N$ となるすべての $k$ で $n_k\geqq N$ となる．よって $k\geqq N$ となるすべての $k$ で $|a_{n_k}-\alpha|<\varepsilon$ となり，$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が $\alpha$ に収束するとわかる． (04-2)$A_n$ が $A$ に収束しているとする．このとき
$$|a_n-a|=\sqrt{(a_n-a)^2}\leqq\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}=|A_n-A|$$
であるから，$|A_n-A|<\varepsilon$ なら $|a_n-a|<\varepsilon$ となる．よって $a_n$ は $a$ に収束する．同様に，$b_n$ は $b$ に収束する．次に，$a_n\to a, b_b\to b(n\to\infty)$ と仮定する．任意の $\varepsilon>0$ に対してある番号 $N_a,N_b$ が存在して，$n\geqq N_a$ ならば $|a_n-a|<\varepsilon$, $n\geqq N_b$ ならば $|b_n-b|<\varepsilon$ となる．よって $N=\max\{N_a,N_b\}$ とおくと，$n\geqq N$ ならば
$$|A_n-A|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}<\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}=\sqrt{2}\varepsilon$$
となるから，$A_n\to A(n\to\infty)$ である．