03 単調数列の収束

実数の性質シリーズ

定義 (有界)

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界であるとは，集合 $\{a_n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$ が上に有界になっていることである．

同様に下に有界であることも定義される．上に有界かつ下に有界な数列を単に有界数列という．

定義 (単調増加・単調減少)

実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加であるとは，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$$

を満たすことである．特に

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

であるとき，狭義単調増加であるという．

不等号の記号を逆向きに変えることで，単調減少・狭義単調減少についても同様に定義される．

実数の連続性から，次が示される．

定理 02

上に有界な単調増加数列は収束する．

(証明) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界な単調増加数列とする. 実数の連続性により，$\alpha = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ が存在する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha - \varepsilon$ は $\{a_1, a_2, \cdots\}$ の上界ではないから，$\alpha - \varepsilon < a_N$ を満たす a_N が存在する．また，数列は単調増加であるから，$n \geqq N$ ならば $a_N \leqq a_n$ すなわち $\alpha - \varepsilon < a_n \leqq \alpha$ となる．これは $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を意味する． □

下に有界な単調減少列が収束することも同様に示される (演習 02-1).

定理 02 により，数列において，上に有界で単調増加でありさえすれば，極限値を明示することなく収束を示せることになる．

(例)(1) 次の要領で数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することを示せ (この極限値はネイピア数 e と定義される).

(i) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ と $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ の展開式を比較することによって，$\{a_n\}$ が狭義単調増加であることを示せ．

(ii) すべての n について $a_n < 3$ であることを示せ．

(証明) (i) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{0}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad \cdots①$$

①で n を $n+1$ に取り替えれば

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{0}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

となるが，各 $i = 1, 2, \cdots$ で $\left(1 - \dfrac{i}{n}\right) < \left(1 - \dfrac{i}{n+1}\right)$ となることから $a_n < a_{n+1}$ が成立する．

(ii) 展開式①において，各 $\left(1 - \dfrac{i}{n}\right)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots k-1)$ を 1 で取り替えれば,

$$(①の右辺) < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdots ②.$$

また各 $k = 2, 3, \cdots$ で $k! \geqq 2^{k-1}$ により，

$$(②の右辺) \leqq 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= 2 + \frac{\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} < 2 + 1 = 3. \quad □$$

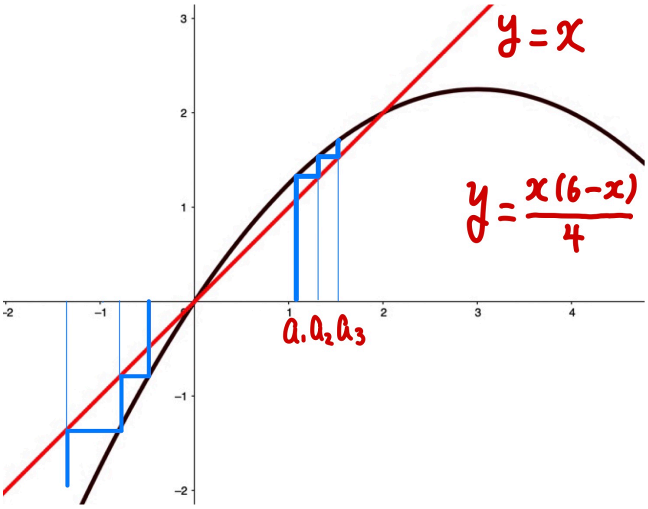
(例)(2) $0 < a_1 < 2$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n(6 - a_n)}{4}$ で定められる数列は次の (i),(ii) を満たす (演習 03-2).

(i) すべての $n \in \mathbb{N}$ で $0 < a_n < 2$

(ii) すべての $n \in \mathbb{N}$ で $a_n < a_{n+1}$

よって，上に有界な (狭義) 単調増加数列であるから，$\{a_n\}$ は収束する． □

(補足) (例)(2) において $\{a_n\}$ の収束を確認した後に，その極限値を α とおくと，漸化式

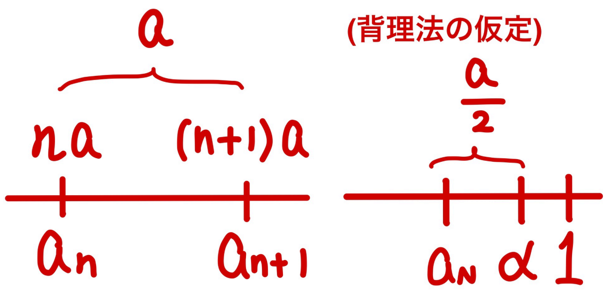


$a_{n+1}=\dfrac{a_n(6-a_n)}{4}$ の両辺で $n\to\infty$ として $\alpha=\dfrac{\alpha(6-\alpha)}{4}$，これを解いて $\alpha=0$ または 2 を得る．すべての n で $0<a_n<2$ と a_n が狭義単調増加であることから，$\alpha=2$ となる．この例において，収束するかどうかの確認は重要である．例えば初期値 a_1 の値を負にすると，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する．このことから分かるように，形式的に漸化式の両辺で $n\to\infty$ として "極限値の候補" α を計算できたとしても、それが本当に極限値であるとは限らない． □

上の定理 02 の系として次が言える．

系 (アルキメデスの原理)

> a を正の実数とする．このとき $\dfrac{1}{n}<a$ をみたす自然数 n が存在する．



(証明) $a_n=na$ とおく．すべての n で $a_n\leqq 1$ であると仮定する．$a_{n+1}-a_n=(n+1)a-na=a$ に着目して矛盾を導く．数列 $\{a_n\}$ は上に有界で，(狭義) 単調増加であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が存在する．$\varepsilon=\dfrac{a}{2}$ に対してある番号 N が存在し，$n\geqq N$ ならば $1-\dfrac{a}{2}<a_n\leqq\alpha$ が成り立つ．これより

$$a=a_{N+1}-a_N<\alpha-\left(\alpha-\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}$$

となり矛盾を得る．ゆえにある番号 n が存在し，$a_n>1$，すなわち $na>1$ である． □

～演習問題～

03-1 下に有界な単調減少数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ (定理 02 を使ってよい)．

03-2 数列 $\{a_n\}$ は，

$0<a_1<2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n(6-a_n)}{4}$ $(n=1,2,\cdots)$

で定められるものとする．次の (i),(ii) が成り立つことを示せ．

(i) すべての $n\in\mathbb{N}$ で $0<a_n<2$

(ii) すべての $n\in\mathbb{N}$ で $a_n<a_{n+1}$

03-3 【$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が狭義単調増加であることの別証明】

1 と n 個の $1+\dfrac{1}{n}$ 合計 $n+1$ 個の数に対して，$n+1$ 変数の相加平均・相乗平均の関係式を用いることによって，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を導け．

(03-1) 数列 $\{a_n\}$ のつくる集合が下に有界であるから，ある $c\in\mathbb{R}$ が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$c\leqq a_n$ となる．これは $-c\geqq -a_n$ となるから，数列 $\{-a_n\}$ が上に有界であることを示す．よって定理 02 により，数列 $\{-a_n\}$ はある値 α に収束する．これは $\{a_n\}$ が $-\alpha$ に収束することを意味する．(03-2) (i)2 次式の平方完成の要領で $a_{n+1}=-\dfrac{1}{4}\left\{(a_n-3)^2-9\right\}$ と変形できる．

$0<a_n<2$ と仮定すれば

$$-3<a_n-3<-1$$
$$1<(a_n-3)^2<9$$
$$-8<(a_n-3)^2-9<0$$
$$0<-\frac{1}{4}\left\{(a_n-3)^2-9\right\}<2$$

となるから，$0<a_{n+1}<2$ が導ける．$0<a_1<2$ であるから，数学的帰納法により (i) が成立する．

(ii) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n(6-a_n)}{4}-a_n=\dfrac{a_n(2-a_n)}{4}>0$

ただし，最後の式は (i) による．

(03-3) $\dfrac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

であり，この左辺は $1+\dfrac{1}{n+1}$ と等しい．両辺を $n+1$ 乗すれば題の式を得る．