02 上限と下限

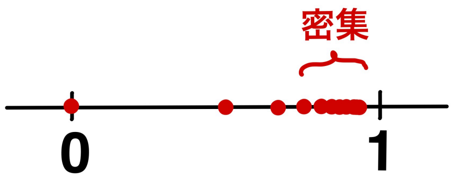
実数の性質シリーズ

定義 (有界)

A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．A が上に有界であるとは，ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in A$ に対して，$x \leqq b$ が成り立つことをいう．このような b を A の上界という．

不等式の記号を $\geqq$ に変えた条件を満たすとき，A は下に有界，b は A の下界という．また，A が上にも下にも有界のとき，単に A は有界であるという．

(例)(1) 集合 $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$ について．



任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$1 - \dfrac{1}{n} \leqq 1 \cdots$ ①

であるから，1 は集合 A の上界である．また，任意の n に対して

$0 \leqq 1 - \dfrac{1}{n} \quad \cdots$ ②

であるから*，0 は集合 A の下界である． $\square$

(注意) (例)(1) において，1 以上の任意の数は A の上界になる．また，0 以下の任意の数は A の下界になる． 一般に，集合 A に上界 b が存在するとき，b 以上の任意の実数は A の上界になり，また集合 A の下界 c が存在するとき，c 以下の任意の実数は A の下界になる．

一般に，m が集合 $A \subset \mathbb{R}$ の最大元であるとは，以下の 2 条件を満たすことをいう．

(1) $m \in A$

(2) 任意の $a \in A$ に対し，$a \leqq m$

集合 A の最大元が存在するとき，それを $\max A$ とかく．また，(2) の不等式の記号を $\geqq$ に変えた条件および (1) を満たすとき，m は最小元といい，その元を $\min A$ とかく．例えば (例)(1) について，$\min A = 0$ であるが，$\max A$ は存在しない．

定義 (上限)

上に有界な集合 $A \subset \mathbb{R}$ において，A の上界全体の集合における最小元 m が存在するとき，m を A の最小上界または上限といい，$m = \sup A$ と表す．

下限 (最大下界) も同様に定義され，$\inf A$ と表す†．なお，上限 (下限) は，存在するならばただ 1 つに限る (演習 02-1)．

実数を特徴づけるのが次の性質である．

公理 (実数の連続性)

上に有界な実数の部分集合 A に対して，A の上限が $\mathbb{R}$ の中に必ず存在する．

このシリーズでは，この実数の連続性を公理として認め，実数のもつ種々の性質を導いていく．

m が A の上限という定義は，次の (i) かつ (ii) を意味する．

(i) 任意の $a \in A$ に対して，$a \leqq m$ (m は上界)

(ii)「$x \in \mathbb{R}$ が A の上界ならば，$m \leqq x$」(m の最小性)

この (ii) の条件は，集合 A に含まれてないかもしれない元 x を扱うことになるため，少し使いにくいことがある．そこで，言い換えてみよう．(ii) について対偶をとれば

(ii')「$x < m$ ならば，x は A の上界ではない」

---

*記号「$\leqq$」の解釈について，誤解が多いので補足しておく．「$a \leqq b$」は「$a < b$ または $a = b$」を主張する記号であり，等号が成り立つ場合があるかどうかについては何も主張していない．(例)(1) では，②は $n = 1$ のときに等号が成立するが，①はどんな n に対しても等号は成立しない．

†下に有界な集合 $A \subset \mathbb{R}$ において，A の下界全体の集合における最大元 m が存在するとき，m を A の最大下界または上限といい，$m = \inf A$ と表す．

となる．さらに，結論の否定を言い換えれば，

(ii") 「$x<m$ ならば，$x<a$ となる $a\in A$ が存在する」

となる．これを定理としてまとめておく．なお，下限であるための条件も同様である[‡]．

定理 01 (上限であるための条件)

$m\in\mathbb{R}$ が $A\subset\mathbb{R}$ の上限であるための必要十分条件は (1) かつ (2) である．
(1) 任意の $a\in A$ に対して，$a\leqq m$ (m は上界)
(2) $x<m$ となる任意の x に対し，$x<a$ となる $a\in A$ が存在する．(m より小さいものは上界にはならない)

(例)(1, 続) 集合 $A=\left\{1-\dfrac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$ について，$\sup A=1$，$\inf A=0$ である．
まず 1 が上限であることを示すために，定理 01 の (1)(2) が成り立つことを確認する．(すでにみたように) 任意の n で $1-\dfrac{1}{n}\leqq 1$ である ((1) が成り立つ)．また，1 より小さい数 x に対して，$n_0>\dfrac{1}{1-x}$ となるような自然数 n_0 を選べば，$x<1-\dfrac{1}{n_0}\in A$ となる ((2) が成り立つ)．よって $\sup A=1$ となる．
次に，0 が下限であることを示す．(これもすでにみたように) 任意の n で $0\leqq 1-\dfrac{1}{n}$ であるから 0 は下界である定理 01 の下限版の (1) が成り立つ)．また 0 より大きい任意の数 y に対して，$0<y$ となるから y は下界にはならない (定理 01 の下限版の (2) が成り立つ)．よって $\sup A=0$ である．□

A に最大元 $\max A$ が存在するとき，$\max A=\sup A$ である．同様に，A に最小元 $\min A$ が存在するとき，$\min A=\inf A$ である．これは上の (例)(1, 続) の議論と同様にして示される (演習問題 02-3)．

上限は，有理数の集合の中では存在しないことがある．

(例)(2) 有理数の部分集合 $B=\{x\in\mathbb{Q}|x^2<2\}$ について，有理数の中に上限は存在しない．
(証明)B に対して，有理数の上限 $s\in\mathbb{Q}$ が存在したとする．$s^2=2$ と仮定すると，$s=\dfrac{q}{p}$ (p,q は整数) とおくと $q^2=2p^2$ となって両辺の 2 の素因数の個数の偶奇が異なり矛盾である．$s^2<2$ とすると $s^2<t^2<2$ となる有理数 $t\in\mathbb{Q}$ が存在する (このような t は例えば次のように構成できる: c をこれから定める正数とし，$(s+c)^2=s^2+2sc+c^2$ が 2 未満，すなわち $2sc+c^2<2-s^2$ となるように，$2sc<\dfrac{1}{2}(2-s^2)$ かつ $c^2<\dfrac{1}{2}(2-s^2)$ となるようにしたい．そこで $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{4s}(1-s^2)$ かつ $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{2}(1-s^2)$ となるような自然数 m,n を選び，$c=\min\left\{\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}\right\}$ として $t=s+c$ とすればよい)．$s<t, t\in B$ となるが，これは s が上限であることに反する．また，$2<s^2$ としても $2<t^2<s^2$ となる有理数が存在する (演習 02-4)．このとき t は B の上界となるから，s が最小上界であることに反する．□

〜演習問題〜

02-1 A を上に有界な集合とする．A の上限 (下限も) は，存在するならばただ一つに限ることを示せ．
02-2 $a<b$ とする．区間 $I=[a,b)=\{x|a\leqq x<b\}$ について，$\inf A, \sup A$ を求めよ (証明はしなくてもよい)．
02-3 A は $\mathbb{R}$ の部分集合とする．次のことを示せ．
(i) A に最大元 $\max A$ が存在するとき，$\max A=\sup A$ である．
(ii) A に最小元 $\min A$ が存在するとき，$\min A=\inf A$ である．
02-4 有理数 $s\in\mathbb{Q}$ に対して，$s^2>2$ ならば，

[‡] $m\in\mathbb{R}$ が $A\subset\mathbb{R}$ の下限であるための必要十分条件は (1) かつ (2) である．(1) 任意の $a\in A$ に対して，$m\leqq a$ (m は下界) (2) $m<x$ となる任意の x に対し，$a<x$ となる $a\in A$ が存在する．(m より大きいものは下界にはならない))

$s^2 > t^2 > 0$ となる有理数 t が存在することを示せ．

(02-1) (証明) α, α' をそれぞれ A の上限とする．α' は A の上界であるから，$\alpha \leqq \alpha'$ である．また α は A の上界であるから $\alpha' \leqq \alpha$ である．よって $\alpha = \alpha'$ である．下限についても同様である． (02-2) $\inf A = a, \sup A = b$ (02-3)(i) $m = \max A$ とする．m が定理 01 の (1)(2) を満たすかみればよい．最大元の定義により任意の $a \in A$ に対して $a \leqq m$ である ((1) が成り立つ)．また，$x < m$ とすれば，$x < a$ となる $a \in A$ として $a = m \in A$ をとればよい ((2) が成り立つ)．以上により，$\sup A$ は m と等しく，$\sup A = \max A$．(ii) も同様．(02-4) c をこれから定める正数とし，$(s-c)^2 = s^2 - 2sc + c^2$ が 2 より大きく，かつ $s - c > 0$ なるように，$s^2 - 2 > 2sc$ すなわち $c < \dfrac{s^2-2}{2s}$ および $c < s$ となるようにしたい．そこで $\dfrac{1}{m} < \dfrac{s^2-2}{2s}$，$\dfrac{1}{n} < s$ となるような自然数 m, n を選び，$c = \min\left\{\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n}\right\}$ と定め，$t = s - \dfrac{1}{n}$ とすればよい．