01 数列の極限

実数の性質シリーズ

自然数 $1, 2, 3, \cdots$ の集合を $\mathbb{N}$ と表す．
実数に番号を振ったものを実数列という．本シリーズでは，数列といったら各項が実数のものをさすものとする．数列の添字の集合を右下に添えて表すこともある．例えば数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

は $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のように表される．

高校では，数列の収束は「n を限りなく大きくするとき，a_n が一定の値 α に限りなく近づく」ことと定義されていたが，このままだと極限の厳密な議論が難しくなることがある．そこで，収束の定義を次のように行う ($\varepsilon - N$ 論法)．

定義 (数列の極限)

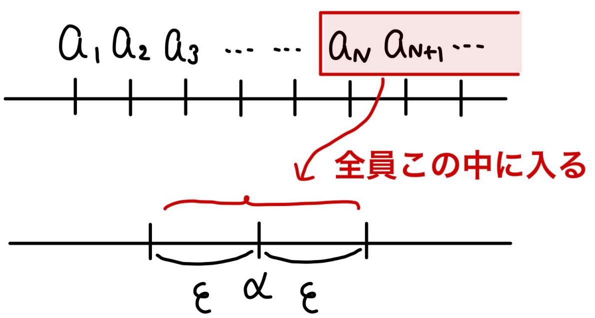
数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある実数 α に収束するとは，どんな正数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となることをいう．このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ あるいは } a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$

とかき，数列 $\{a_n\}$ は数 α に**収束する**という．また，α は数列 a_n の**極限値**であるという．いかなる実数にも収束しない数列は発散するという．



上の $\varepsilon - N$ による定義は ε が先で，N が後に定まる点に注意しよう．ε が先に定まり，それに応じた番号 N[*]をみつけ，

$$n \geqq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできることが言えれば，数列の収束性が示せたことになるのである．

(例)(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ が成り立つことを示せ．

(証明の準備) $a_n = \dfrac{1}{n}$ とする．$|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ とするためには n が $\dfrac{1}{\varepsilon}$ 以上の数であればよいので，$N \geqq \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるように番号 N を定めればよい[†]．

(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N を $N \geqq \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるように定めれば，$n \geqq N$ のとき $\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる．すなわち

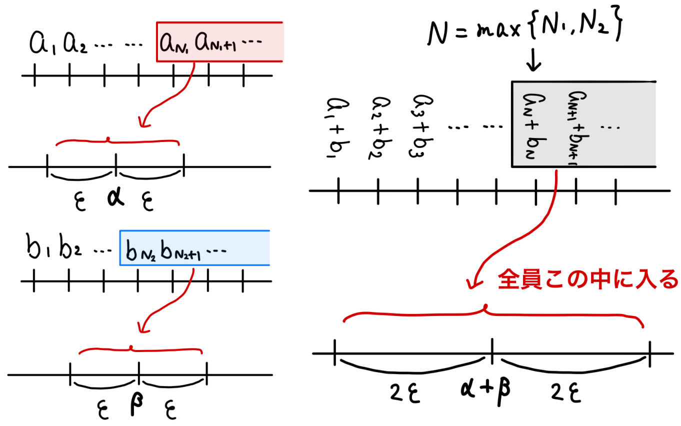
$$n \geqq N \text{ ならば } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である． □

(例)(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するとき，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

となることを示せ．



(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 N_1, N_2 が存在して，

$$n \geqq N_1 \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$
$$n \geqq N_2 \text{ ならば } |b_n - \alpha| < \varepsilon,$$

が成立している．よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，$n \geqq N$ のとき

---

[*] ε ごとに定まるので ε の関数として $N(\varepsilon)$ とかいてもよい

[†] このような番号を取ることができるのには，暗に「アルキメデスの原理」が使われている (第 3 回目で証明する)．

$$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = |(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)|$$
$$\leqq |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| < 2\varepsilon \cdots ①$$
となる (三角不等式 (演習 01-1) を用いた)． □

上の①の右辺は 2ε のように (定数)$\times\varepsilon$ の形でも構わない．ε は任意の正の実数を変化するので，$2\times\varepsilon$ も任意の正の実数を変化するからである (気になるなら，改めて任意の正の数 $\varepsilon' > 0$ を決めて $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ とすればよい)．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するとき，
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$$
となることを示せ．

(証明) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N_1 が存在して，$n \geqq N$ であるすべての自然数 n について $|a_n| \leqq \varepsilon$ となる．

三角不等式により，
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1}}{n}\right| + \frac{|a_{N_1}|+|a_{N_1+1}|+\cdots+|a_n|}{n}$$
$$\leqq \frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1}|}{n} + \frac{(n-N_1+1)\varepsilon}{n}$$
$$\leqq \frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1}|}{n} + \varepsilon$$
また番号 N_2 を
$$N_2 \geqq \frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1}|}{\varepsilon}$$
となるように定め，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，$n \geqq N$ のとき
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \leqq 2\varepsilon$$
となる．よって $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = 0$ が示された． □

～演習問題～

01-1 a, b は実数とする．

(1) $|a+b| \leqq |a|+|b|$

(2) $||a|-|b|| \leqq |a-b|$

を示せ (三角不等式)．

01-2 (1) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束し，すべての n で $a_n \leqq b_n$ となるとき，$\alpha \leqq \beta$ を示せ．

(2) すべての n で $a_n < b_n$ だが，$\alpha = \beta$ となるような例をあげよ．

01-3 (はさみうちの原理) 3 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が任意の n について $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ をみたし，さらに $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ がどちらも α に収束するとき，$\{b_n\}$ も同じ α に収束することを示せ．

(01-1) (01-1) 一般に，実数 x に対して $x \leqq |x|, -x \leqq |x|$ となることを利用する．(1) $a+b \geqq 0$ のとき，$|a+b| = a+b \leqq |a|+|b|$ である．また，$a+b < 0$ のとき，$|a+b| = -(a+b) = -a-b \leqq |a|+|b|$ である．(2) (1) で示したことより，$|a| = |(a-b)+b| \leqq |a-b|+|b|$．移項して $|a|-|b| \leqq |a-b|$．a, b を入れ替えて同様の議論をすれば $|b|-|a| \leqq |b-a| = |a-b|$ となり，$-(|a|-|b|) \leqq |a-b|$ が示される．よって (2) が示された．

(01-2) (1) 背理法．$\alpha > \beta$ とし，$\varepsilon = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とする．収束の定義により，十分大きな自然数 n が存在して，$|a_n-\alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n-\beta| < \varepsilon$ となる．よって $b_n < \beta+\varepsilon = \alpha-\varepsilon < a_n$ となるが，これは仮定に反する．(2) 例えば $a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n}$.

(01-3) $\varepsilon > 0$ を固定する．$\{a_n\}, \{c_n\}$ は α に収束するので，ある番号 N_a, N_c が存在して，

$n \geqq N_a$ ならば $\alpha-\varepsilon < a_n < \alpha+\varepsilon$

$n \geqq N_c$ ならば $\alpha-\varepsilon < c_n < \alpha+\varepsilon$

となる．$N = \max\{N_a, N_b\}$ とおけば，$n \geqq N$ のとき

$\alpha-\varepsilon < a_n \leqq b_n \leqq c_n < \alpha+\varepsilon$

となる．これは $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ を表す．