モローの不等式の右辺の証明

式変形チャンネルのノート

モローの不等式

正の整数 n に対して，次が成り立つ．

$$\frac{2n}{2n+1}e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{2n+2}e$$

2020 年 1 月 2 日投稿の動画内では

$$\frac{2n}{2n+1}e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が成り立つことを微分法を用いて示した．このノートでは，同様に証明できるので動画内では扱わないといった部分，すなわち

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{2n+2}e$$

の証明を行う．

(証明)

自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{2n+2}e$$

を示すためには，$x=\dfrac{1}{n}$ とおいてできる x についての不等式

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{2+x}{2(1+x)}e \cdots\cdots ①$$

が $x>0$ で成り立つことを示せば十分である．そのためには，①の両辺に自然対数をとり，分母を払って得られる次の不等式

$$x\ \left\{1-\log 2+\log\frac{2+x}{1+x}\right\}-\log(1+x)>0\cdots ②$$

が $x>0$ で成り立つことを示せばよい．

② の左辺を $G(x)$ とおく．x で微分する．

$$\begin{aligned}G'(x) &= 1-\log 2+\log\frac{2+x}{1+x}+x\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{1+x}\right)\\&\qquad -\frac{1}{1+x}\\&= 1-\log 2+\log\frac{2+x}{1+x}-\frac{2}{2+x}\end{aligned}$$

もういちど x で微分する．

$$\begin{aligned}G''(x) &= \left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{1+x}\right)+\frac{2}{(2+x)^2}\\&= \frac{(4+x)(1+x)-(2+x)^2}{(2+x)^2(1+x)}\\&= \frac{x}{(2+x)^2(1+x)}\end{aligned}$$

よって $x>0$ のとき $G''(x)>0$ となる．ゆえに関数 $G'(x)$ は単調増加であり，$G'(0)=0$ とから $x>0$ ならば $G'(x)>0$ となる．したがって関数 $G(x)$ は単調増加であり，また $G(0)=0$ により $x>0$ ならば $G(x)>0$ となる．よって問題の不等式は証明された． □

【参考文献】

(1) 「私の備忘録」(Web サイト)
http://shochandas.xsrv.jp/napier/PAGE001.HTM
(2) 初等数学 第 87 号 繁木伸孝「ある極限値とモローの不等式」