パスカルの三角形の逆数和計算

式変形チャンネルのノート

2020 年 1 月 22 日の夕方に投稿した動画で扱った以下の問題について，ある程度きちんとした解答を載せておく．

問

パスカルの三角形の “外側”2 列を省いた逆数和

$$\frac{1}{{}_4C_2}+\left(\frac{1}{{}_5C_2}+\frac{1}{{}_5C_3}\right)+\left(\frac{1}{{}_6C_2}+\frac{1}{{}_6C_3}+\frac{1}{{}_6C_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{{}_{k+2}C_2}+\frac{1}{{}_{k+2}C_3}+\cdots+\frac{1}{{}_{k+2}C_k}\right)+\cdots$$

を計算したい．

(計算) 和の順序を変えて，

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{{}_nC_k}$$

を計算すればよいことに注意する*．N を十分大きい正の整数として

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=k+2}^{N}\frac{1}{{}_nC_k}\\
&=\sum_{n=k+2}^{N}\frac{(n-k)!k!}{n!}\\
&=k!\sum_{n=k+2}^{N}\frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}\\
&=\frac{k!}{k-1}\sum_{n=k+2}^{N}\left\{\frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{1}{(n-k+2)(n-k+3)\cdots n}\right\}\\
&=\frac{k!}{k-1}\left\{\frac{1}{3\cdot4\cdot\cdots\cdot(k+1)}-\frac{1}{(N-k+2)(N-k+3)\cdots N}\right\}
\end{aligned}$$

ここで $N\to\infty$ として

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{{}_nC_k}&=\frac{k!}{k-1}\cdot\frac{1}{3\cdot4\cdot\cdots\cdot(k+1)}\\
&=\frac{2}{(k-1)(k+1)}\\
&=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

を得る．M を十分大きい整数として

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{M}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{{}_nC_k}&=\sum_{k=2}^{M}\left\{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right\}\\
&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{M}-\frac{1}{M+1}
\end{aligned}$$

となる．したがって，$M\to\infty$ として，求める和は $\dfrac{3}{2}$ である． □

*「各項が正の級数について，ある順序の和で収束するならば，どんな順番に和の計算しても同じ値に収束すること」を暗に用いている (例えば杉浦光夫『解析入門 1』第 V 章など)

【参考文献】

(1) 数研通信第 56 号 大塚秀幸「パスカルの三角形のある領域における逆数和」