13 準同型定理

ゼロから始める群論 2020

定義 (同型)

群 G, G' に対して，G を G' へ移す全単射の準同型写像 f を**同型写像**という．同型写像が存在するとき，G と G' は同型であるといい，$G \cong G'$ と表す．

(例)(1) 加法群 $\mathbb{R}$ から，正の実数の乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への写像 f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto 2^x \end{aligned}$$

は $\ker f = \{0\}$ により単射，また全射 ($f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$) でもあるから f は同型写像となる．よって $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ と表される． □

前回扱ったように，$\ker f$ は群 G の正規部分群であるから，剰余群 $G/\ker f$ が定義できる．この剰余群について，常に f の像 $f(G)$ と同型であることを保証するのが次の定理である．

定理 14

f を群 G から群 G' への準同型写像とする．このとき写像

$$\begin{aligned} \varphi : \ G/\ker f &\longrightarrow f(G) \\ (\ker f)x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

が定義でき，φ は全単射の準同型写像となる．すなわち，

$$G/\ker f \cong f(G).$$

(証明) G' の単位元を e'，$\ker f = N$ とかくことにする．
まず φ が写像として定義できているかを確認する．G/N の元 Na について，類の別の代表元 b をとると，ある $k \in N$ が存在して，$b = ka$ と表される．f が準同型写像であることと，$N = \ker f$ の定義により，$f(b) = f(ka) = f(k)f(a) = e'f(a) = f(a)$．よって写像 φ は代表元の取り方によらずに定まる．
φ が準同型写像であることを確認する．実際，$\varphi(NaNb) = \varphi(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(a)\varphi(b)$ である．
像から任意の元 $f(a) \in f(G)$ $(a \in G)$ をとると，$\varphi(Na) = f(a)$ となるから，φ は全射である．また，$\varphi(Na) = e'$ とすると，$f(a) = e'$ により $a \in N$ で $Na = N$ となる．すなわち $\ker \varphi = \{N\}$ となるから，定理 13 により φ は単射となる． □

(例)(2) 乗法群 $\mathbb{R}^\times$ から乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への写像 f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^\times &\longrightarrow \mathbb{R}^\times \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

は準同型写像で，$\ker f = \{-1, 1\}$, $f(\mathbb{R}^\times) = \mathbb{R}_{>0}$(正の実数の乗法群) であるから，準同型定理により，

$$\mathbb{R}^\times/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$$

となる． □

(例)(3) n 次の対称群 S_n にその符号 sgn を対応させる写像 f

$$\begin{aligned} f : S_n &\longrightarrow \{1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto \mathrm{sgn}\sigma \end{aligned}$$

は S_n から乗法群 $\{1, -1\}$ への準同型写像である．$\ker f = A_n$, $f(S_n) = \{1, -1\}$(f は全射) であるから準同型定理により

$$S_n/A_n \cong \{1, -1\}$$

である． □

〜演習問題〜

13-1 G を可換群とする．このとき

$$G_{(3)} := \{x \in G | x^3 = e\}$$
$$G^{(3)} := \{x^3 | x \in G\}$$

は G の部分群であり，$G/G_{(3)} \cong G^{(3)}$ となることを示せ．

(13-1)$G_{(3)}$ が群になっていることは演習 03-1(2) で確認済み．$x^3, y^3 \in G^{(3)}$ とすれば $(x^3)^{-1}y^3 = (x^{-1}y)^3 \in G^{(3)}$ により $G^{(3)}$ は群である (定理 03 の (3))．ここで写像 $f : G \to G^{(3)}$, $f(x) = x^3$ を定義すると，f は準同型写像である．実際 $f(xy) = (xy)^3 = x^3y^3 = f(x)f(y)$. また $\ker f = G_{(3)}$ および $f(G) = G^{(3)}$ (f が全射) であることから，準同型定理により $G/G_{(3)} \cong G^{(3)}$ を得る．なお，前半の $G_{(3)}, G^{(3)}$ が群である確認は，$\ker f = G_{(3)}$ および $f(G) = G^{(3)}$ からもわかる (定理 12 と定理 11(3))．