12 カーネル

ゼロから始める群論 2020

定理 12

f を群 G から群 G' への準同型写像とし，e' を群 G' の単位元とする．このとき集合

$\ker f := \{a \in G | f(a) = e'\}$

は G の正規部分群である．これを f の核という．

(証明) まず $\ker f$ が G の部分群であることを示す．任意の $a, b \in \ker f$ に対して

$f(a^{-1}b) = f(a)^{-1}f(b) = e'^{-1}e' = e'$

すなわち $a^{-1}b \in \ker f$ となるから定理 03 の (3) が成立し，$\ker f$ は G の部分群とわかる．
次に，$\ker f$ が G の正規部分群であることを示す．任意の $a \in G, b \in \ker f$ に対して，

$$\begin{aligned} f(aba^{-1}) &= f(a)f(b)f(a^{-1}) \\ &= f(a)f(a)^{-1} = e' \end{aligned}$$

すなわち $a(\ker f)a^{-1} \subset \ker f$ となるから定理 09 の (N-2) が成立し，$\ker f$ は G の部分群とわかる． □

(例)(1) 前回扱ったように，乗法群 $\mathbb{R}^\times$ から乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への写像 f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^\times &\longrightarrow \mathbb{R}^\times \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

は準同型写像である．核 $\ker f$ は $|x| = 1$ となる x を求めればよい．すなわち

$\ker f = \{-1, 1\}$

である． □

(例)(2) 前回扱ったように，加法群 $\mathbb{R}$ から，正の実数の乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への写像 f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto 2^x \end{aligned}$$

は準同型写像である．$2^x = 1$ となる x は 0 のみである．すなわち

$\ker f = \{0\}$

である． □

(例)(3) 前回扱ったように，n 次の対称群 S_n にその符号 sgn を対応させる写像 f

$$\begin{aligned} f : S_n &\longrightarrow \{1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto \mathrm{sgn}\sigma \end{aligned}$$

は S_n から乗法群 $\{1, -1\}$ への準同型写像である．$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ は $\sigma \in A_n$ を意味するから，

$\ker f = A_n$

である． □

定理 11 で示したように，$f(e) = e'$ であるから，f の核は G の単位元 e を必ず含む．もし f の核が e のみからなるならば，f が単射であり，またその逆も成り立つ．

定理 13

f を群 G から群 G' への準同型写像とし，e を群 G の単位元とする．このとき，

$\ker f = \{e\} \Leftrightarrow f$ は単射

(証明) ($\Rightarrow$) f が単射であることを示す．$a, b \in G$ で $f(a) = f(b)$ とする．両辺に $(f(a))^{-1}$ を左からかけ，f が準同型であることを使うと $e' = (f(a))^{-1}f(b) = f(a^{-1}b)$．ここで $\ker f = \{e\}$，すなわち f で e' に移る G の元は e しかないから $a^{-1}b = e$，両辺の左から a をかけて $a = b$ を得る．したがって f は単射である．
($\Leftarrow$) $f(x) = e'$ とすればつねに $f(e) = e'$ であり，かつ f の単射性から $x = e$，すなわち $\ker f = \{e\}$ となる． □

〜演習問題〜

12-1 G を群，N をその正規部分群とする．剰余群 G/N に対し，写像

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/N \\ x &\longmapsto Nx \end{aligned}$$

が定義される．これが準同型写像であることを示し，その核 $\ker \pi$ を求めよ (この π を G から G/N への標準的な準同型写像という)．

(12-1)$\pi(xy) = Nxy = (Nx)(Ny) = \pi(x)\pi(y)$ により π は準同型写像である．また，G/N における単位元は N であり，$\pi(x) = N$ とすれば $xN = N$，これは $x \in N$ と同値である．すなわち $\ker \pi = N$．