11 準同型写像

ゼロから始める群論 2020

定義 (準同型写像)

f を群 G から群 G' への写像とする．任意の $a, b \in G$ に対し，

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

を満たす写像を準同型写像という．

(例)(1) 乗法群 $\mathbb{R}^\times$ から乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への写像 f を

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^\times &\longrightarrow \mathbb{R}^\times \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

と定める．これは準同型写像である．実際，$f(xy) = |xy| = |x||y|$ が成り立つ．□

(例)(2) 加法群 $\mathbb{R}$ から正の実数の乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ への写像 f を

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto 2^x \end{aligned}$$

と定める．これは準同型写像である．実際，$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x)f(y)$. □

定理 11

f を群 G から群 G' への準同型写像とし，e を群 G の単位元，e' を G' の単位元とする．このとき次のことが成り立つ．

(1) $f(e) = e'$

(2) $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$

(3) 像 $f(G) := \{f(g) | g \in G\}$ は G' の部分群である．

(証明) (1) $f(e)f(e) = f(ee) = f(e)$ により，両辺の左から $f(e)^{-1}$ をかければ $f(e) = e'$ となる．

(2) $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e)$ および $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e)$ とから $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ となる．

(3) 定理 03 の (3) が成り立つことを示せばよい．$x, y \in g(G)$ とするとある $g_1, g_2 \in G$ が存在して $x = f(g_1), y = f(g_2)$ となる．ここで $x^{-1}y = f(g_1)^{-1}f(g_2) = f({g_1}^{-1}g_2)$ となるが，${g_1}^{-1}g_2 \in G$ であるから $x^{-1}y \in f(G)$ が示せた．よって $f(G)$ は G' の部分群である．□

(例)(3) 集合 $\{1, -1\}$ は積に関して群になる．n 次の対称群 S_n の元 σ に対し，その符号 sgn を対応させる写像 f を

$$\begin{aligned} f : S_n &\longrightarrow \{1, -1\} \\ \sigma &\longmapsto \mathrm{sgn}\sigma \end{aligned}$$

と定める．f は S_n から乗法群 $\{1, -1\}$ への準同型写像である．□

〜演習問題〜

11-1 群の 2 つの準同型写像 $f : G \to G', g : G' \to G''$ に対して，合成写像 $g \circ f : G \to G''$ も準同型写像になることを示せ．

11-2 群 G の任意の元 a を一つ定めたとき，写像

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

は準同型写像であることを示せ．

(11-1) 任意の $a, b \in G$ に対して，$(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)$. (11-2) $f(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f(x)f(y)$ により f は準同型写像である．