10 剰余群

ゼロから始める群論 2020

定理 10

G を群，H をその正規部分群とする．剰余類の集合

$G/H := \{H, Ha, Hb, \cdots\}$

に対し，演算を

$aH \cdot bH := abH$

で定めると，G/H は群となる (この群を剰余群という)．

(証明) 正規部分群の条件により，演算は定義できている (定理 09 の (N-1))．結合法則は G が群であることから従う．単位元は $H(= eH)$ であり，Ha の逆元は Ha^{-1} である． □

(例)(1) 加法群 $\mathbb{Z}$ に対して，その正規部分群 $5\mathbb{Z}$ による剰余群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は，5 つの元 (剰余類)

$5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}+1, 5\mathbb{Z}+2, 5\mathbb{Z}+3, 5\mathbb{Z}+4$

からなる群である[*]．例えば

$(5\mathbb{Z}+3)+(5\mathbb{Z}+4)=5\mathbb{Z}+7$

となるが，$5\mathbb{Z}+7$ は剰余類として $5\mathbb{Z}+2$ と同じであるので，結局

$(5\mathbb{Z}+3)+(5\mathbb{Z}+4)=5\mathbb{Z}+2$

となる．この計算からも分かるように，剰余群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は実質的に $\mathbb{Z}_5$ と同じものである． □

(例)(2) H を G の正規部分群とする．G/H が可換群であることと，任意の $a, b \in G$ に対して $aba^{-1}b^{-1} \in H$ であることは同値である．

(証明)

G/H が可換

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G, Ha \cdot Hb = Hb \cdot Ha$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G, Hab = Hba$

$\Leftrightarrow \forall a, b \in G, ab(ba)^{-1} \in H$

となる[*]． □

[*]演算が加法についてなので「+」の表記を使っている

[*]$Hab = Hba$ とすれば，これは $ab \in Hba$ と同値 (定理 08)，すなわちある $h \in H$ が存在して $ab = h(ba)$ となることと同値である．これは $ab(ba)^{-1} \in H$ を意味する．

～演習問題～

10-1 G を巡回群，N をその部分群とする．このとき，剰余群 G/N も巡回群であることを示せ．

(10-1) 仮定により，ある $a \in G$ が存在して，$G = < a >$．N は巡回群 (とくに可換群) の部分群であるから正規部分群であるので，G/N は剰余群として定義できている．G/N の任意の元は $Nx (x \in G)$ と表される．$x \in G$ であるから，$x = a^k (k \in \mathbb{Z})$ と表される．ゆえに，$Nx = Na^k = (Na)^k \in < Na >$ となるから $G/N \subset < Na >$．$G/N \supset < Na >$ は明らかであるから $G/N = < Ha >$ となる．