09 正規部分群

ゼロから始める群論 2020

定理 09

G を群，H をその部分群とする．次の 3 条件は同値である．

(N-1) 任意の $a, a', b, b' \in G$ に対して，
$Ha = Ha', Hb = Hb' \Rightarrow Hab = Ha'b'$

(N-2) 任意の $a \in G$ に対して，
$aHa^{-1} \subset H$

(N-3) 任意の $a \in G$ に対して，
$aH = Ha$

(証明) まず，(N-1) の性質を仮定して (N-2) を示す．

任意の $a \in G$ および $h \in H$ をとったときに，$aha^{-1} \in H$ を示せばよい．$ha^{-1} \in Ha^{-1}$ が成り立つので定理 08 により $Hha^{-1} = Ha^{-1}$ となる．これと明らかに成立する $Ha = Ha$ とから (1) の仮定を用いると

$$Haha^{-1} = Haa^{-1}$$

を得る．この右辺は H と等しいため，再び定理 08 により $aha^{-1} \in H$ となる．

次に (N-2) の性質を仮定して (N-3) を示す．

任意の $a \in G, h \in H$ をとったとき，まず $aH \subset Ha$，すなわち $ah \in Ha$ を示す．(N-2) の仮定により，ある $h' \in H$ が存在して

$$aha^{-1} = h' \text{ すなわち } ah = h'a$$

と表される．よって $ah = h'a \in Ha$ となる．

また，$a^{-1} \in G$ であるからふたたび (N-2) の仮定により，ある $h' \in H$ が存在して

$$a^{-1}ha = h' \text{ すなわち } ha = ah' \in aH$$

により逆の包含関係 $aH \supset Ha$ も示された．

最後に，(N-3) の性質を仮定して (N-1) を示す．

$Hab = Ha'b'$ を示すためには，定理 08 により，$ab \in Ha'b'$ を示せばよい．いま $Ha = Ha', Hb = Hb'$ と仮定しているから定理08により $a \in Ha', b \in Hb'$ となる．よってある h_1, h_2 が存在して，

$$a = h_1a', b = h_2b'$$

と表される．よって $ab = (h_1a')(h_2b')$．ここで (N-3) の仮定から $a'H = Ha'$ であるから，ある h_2' が存在して $a'h_2 = h_2'a'$ とあらわされる．よって $ab = h_1h_2'a'b'$，すなわち $ab \in Ha'b'$ となるから $Hab = Ha'b'$ を得る． □

G を群，H をその部分群とする．上の (N-1)〜(N-3) のいずれかが成り立つ (すなわち (N-1)〜(N-3) すべてが成り立つ) とき，H を G の**正規部分群**という*．

(例)(1) 可換群の任意の部分群は正規部分群である．例えば加法群 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の部分群は正規部分群でもある．

(例)(2) G を有限群，H をその部分群とする．$|G| = 2|H|$ のとき，H は G の正規部分群である．

(証明) (N-3) を示す．$a \in H$ のときは，$aH = H = Ha$ により (N-3) が成り立つ．$a \notin H$ のとき，G を a によって右剰余分解すると $|G| = 2|H|$ により

$$G = H \cup Ha = H \cup aH$$

となる．$H \cap Ha = \varnothing, H \cap aH = \varnothing$ により $Ha = aH$ を得る． □

上の (例)(2) により，特に，交代群 A_n は対称群 S_n の正規部分群であるとわかる．

〜演習問題〜

09-1 H, K が G の正規部分群であれば $H \cap K$ も G の正規部分群であることを示せ ((N-2) を考えてみよ)．

*H が G の正規部分群であることを記号で $H \lhd G$ と表すことがある．

(09-1) そもそも H, K は G の部分群であるから，$H \cap K$ は G の部分群である (定理 03 の系)．まず一般論として $H \cap K \subset H$ かつ $H \cap K \subset K$ であるから $a(H \cap K)a^{-1} \subset aHa^{-1} \cap aKa^{-1}$ となる．ここで仮定から (N-2) が成り立つから $aHa^{-1} \cap aKa^{-1} \subset H \cap K$ となる．よって再び (N-2) によって $H \cap K$ が G の正規部分群であるとわかる．