

08 剰余類の演算定義

ゼロから始める群論 2020

2つの分数に対する計算として、

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

は演算として定義できていない。

例えば $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ であるが、

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{4} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{5}$$

のように、同じ値を用いているにも関わらず、計算結果が異なってしまっている。数学の議論では通常、表示の仕方が複数あるものに対して演算などを定めるときは、その表示の仕方によらずに結果が1つに定まること*を要請する。

ここでは、剰余類を元と考えて、剰余類同士の演算について考察する。 G を群、 H をその部分群とすると、剰余類 Ha と Hb との演算は

$$Ha \cdot Hb := Hab \cdots \textcircled{1}$$

によって定義するのが自然なように思われるが、これは部分群 H の性質によってはうまく演算が定義できないことがある。同じ剰余類であっても代表元によって演算結果が変わる可能性があるからである。

(例) 対称群 S_3 の部分群 $H' = \{e, \mu_1\}$ による剰余類を考えると、 S_3 は

$$S_3 = H'e \cup H'\rho_1 \cup H'\rho_2$$

のように類別できる。(元を明示的にかくと

$S_3 = \{e, \mu_1\} \cup \{\rho_1, \mu_2\} \cup \{\rho_2, \mu_3\}$ となる)

①の方法に従って、例えば、 $H'\rho_1$ と $H'\rho_2$ の計算をしてみると

$$H'\rho_1 \cdot H'\rho_2 = H'\rho_1\rho_2 = H' (= H'e)$$

となる。ここで、代表元を取り替えて $H'\rho_2$ を $H'\mu_3$ として計算してみると、

$$H'\rho_1 \cdot H'\mu_3 = H'\rho_1\mu_3 = H'\mu_2$$

となってしまう、これは先ほどの計算結果 $H'e$

*これを well-defined であると表現する

とは異なる剰余類となっている。すなわち、演算が定義できていないのである。

上の例のようなことが起きないようにするために、以下の条件を考えることにする。

剰余類の演算定義を安心して行える条件

G を群、 H をその部分群とする。

(N-1) 任意の $a, a', b, b' \in G$ に対して、

$$Ha = Ha', Hb = Hb' \Rightarrow Hab = Ha'b'$$

条件 (N-1) は、剰余類に対しての演算を問題なく定義できるようにするための条件であり、この性質をもつ H は正規部分群とよばれる。次回、条件 (N-1) と同値な条件をいくつか導く。

～演習問題～

08-1 次の規則によって有理数 \mathbb{Q} から有理数 \mathbb{Q} への写像は定義できているか。

(規則) 有理数 $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) に対し、値 $a + b$ を対応させる。

(08-1) できていない。例えば $(a, b) = (1, 1), (2, 2)$ の場合を考えればよい。