

07 対称群 S_3 の剰余類

ゼロから始める群論 2020

群 G はその部分群 H によって、共通部分のない (右) 剰余類の和集合として

$$G = Ha_0 \cup Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots$$

のように表される*. このとき, $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ を G の H に関する右完全代表系という*. このように、共通部分のない、いくつかの和集合の形によってもとの集合が表されるとき、もとの集合は**類別**されるという†.

(例)(1) 対称群 $S_3 = \{e, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ は部分群 H (これは He ともかける) $= \{e, \rho_1, \rho_2\}$ によって、例えば次のように類別される.

$$S_3 = H \cup H\mu_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

H	e	ρ_1	ρ_2
$H\mu_1$	μ_1	μ_2	μ_3

S_3

(元を明示的にかけば,

$$S_3 = \{e, \rho_1, \rho_2\} \cup \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} \text{ となる.)}$$

①では、右完全代表系として $\{e, \mu_1\}$ が選ばれているが、同じ類から別の代表系を選ぶこともできる. すなわち $e \in H$ の代わりに、 e と同じ類にある ρ_1 や ρ_2 を代表にして

$$He = H\rho_1 = H\rho_2$$

が成り立つし、また、 μ_1 の代わりに μ_1 同じ類にある μ_2 や μ_3 を代表にしても

$$H\mu_1 = H\mu_2 = H\mu_3$$

が成り立つ. すなわち、同じ類に属している元である限り、どの元が代表になっても剰余類は変化しない. \square

上の例で考察したことを、定理の形で述べておく.

*剰余類が番号を振ることができないほどたくさんある (可算濃度を超えるような) 場合は、添字の集合 Λ を用いて $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Ha_\lambda$ などと表現すべきである.

*左完全代表系も同様に定義される.

†一般には、「同値関係」があれば類別が可能であるが、今回のシリーズでは深入りしない.

定理 08 (代表元の取替可を強調する定理)

G を群, H をその部分群とする. $a, b \in G$ のとき,

$$b \in Ha \Leftrightarrow Ha = Hb$$

(証明) ほとんど定理 07 の言い換えである. (\Rightarrow) H は単位元を含むから、 Hb は $b = eb$ を含む. ゆえに $b \in Ha \cap Hb \neq \emptyset$, 定理 07 により $Ha = Hb$. (\Leftarrow) は Hb が $eb = b$ を含むことからわかる. \square

(例)(2) 対称群 S_3 について $H' = \{e, \mu_1\}$ による剰余類を考えると、 S_3 は

$$S_3 = H' \cup H'\rho_1 \cup H'\rho_2$$

と類別される.

	H'	$H'\rho_1$	$H'\rho_2$
e	ρ_1	ρ_2	
μ_1	μ_2	μ_3	

S_3

元を明示的にかくと

$$S_3 = \{e, \mu_1\} \cup \{\rho_1, \mu_2\} \cup \{\rho_2, \mu_3\}$$

となる. \square

置換の符号についての概念を述べる. 任意の置換はいくつかの巡回置換の積として表されるのであったが (05 対称群を参照), それぞれの巡回置換は互換の積として表すことができる. 例えば (12345) は

$$(12345) = (15)(14)(13)(12)$$

のように 4 個の互換の積として表される. よって任意の置換は互換の積で表される. 置換を互換の積に表す方法は一意的ではないが、そこに現れる互換の数が偶数個であるか奇数個であるかは、もとの置換のみによって決まることが知られている. 現れる互換の数が偶数個であるとき、その置換を**偶置換**といい、現れる互換の数が奇数個であるとき、その置換を**奇置換**という. S_n のうち、偶置換と奇置換は同じ個数 (すなわち $|S_n|/2 = n!/2$ 個ずつ) 存在する. 置換 σ に対して、符号 sgn を偶置換のとき $+1$, 奇置換のとき -1 と定義する. 偶置換全体の集合 $A_n := \{\sigma \in S_n | \text{sgn}(\sigma) = 1\}$ は、 S_n の部分群

である. A_n を n 次の交代群という. 例 (1) の部分群 H は 3 次の交代群 A_3 である.

(例)(3) 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

は互いに素な巡回置換の積

$$(157)(2396)$$

となるが, これは例えば次のような 5 個の互換の積としても表される.

$$(17)(15)(26)(29)(23)$$

したがって $\text{sgn}(\sigma) = -1$ である. \square

～演習問題～

07-1 加法群 $\mathbb{Z}_{12} := \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{11}\}$ をその部分群 $\langle \bar{4} \rangle$ によって (右剰余類の和集合として) 類別せよ.

07-2 G を群, H をその部分群とし, $\{a_1, a_2, a_3\}$ が G の H に関する右完全代表系とする. このとき, $\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, a_3^{-1}\}$ は G の H に関する左完全代表系であることを示せ (すなわち, $G = a_1^{-1}H \cup a_2^{-1}H \cup a_3^{-1}H$, および, i, j が異なるとき $a_i^{-1}H \cap a_j^{-1}H = \emptyset$ を示せ).

(07-1) (例えば) $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{4} \rangle \cup (\langle \bar{4} \rangle + \bar{1}) \cup (\langle \bar{4} \rangle + \bar{2}) \cup (\langle \bar{4} \rangle + \bar{3})$ (もちろん, 代表元は同じ類に属する元であれば取り替えても問題ない). (07-2) 仮定により, $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3$ である. 任意の $x \in G$ をとる. $x^{-1} \in G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3$ であるから, ある番号 i が存在して $x^{-1} \in Ha_i$, すなわちある $h \in H$ が存在して $x^{-1} = ha_i$. これより $x = a_j^{-1}h^{-1}$ となるから $x \in a_j^{-1}H$ よって $G = a_1^{-1}H \cup a_2^{-1}H \cup a_3^{-1}H$ となる. 次に, $a_i^{-1}H \cap a_j^{-1}H \neq \emptyset$ とする. ある $h_1, h_2 \in H$ が存在して $a_i^{-1}h_1 = a_j^{-1}h_2$ となる. 両辺の逆元を考えて $h_1^{-1}a_i = h_2^{-1}a_j$. これにより $Ha_i \cap Ha_j \neq \emptyset$ となるから, 定理 07 により $Ha_i = Ha_j$, すなわち $i = j$ となる.