05 対称群

ゼロから始める群論 2020

1 から n までの n 個の数の集合を

$\Omega := \{1, 2, 3, \cdots, n\}$

とかくことにする

定理 06 (対称群)

集合 Ω から Ω への全単射写像の全体の集合 S_n は，写像の合成を演算として群となる．(この群を**対称群**，各元を置換という)

対称群の元は一般的に以下のように表される．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

この表現では Ω の元 k を元 i_k に対応させることを表しており，$\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の並べ替えである．したがって，S_n は $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ 個の元を含む．S_n の単位元は恒等置換

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

であり，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ の逆元は，

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

である．

(例) (1) S_3 は以下の 6 つの元からなる．

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

例えば，$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ は $\rho_1(1) = 2, \rho_1(2) = 3, \rho_1(3) = 1$ である置換を表す．

置換の積は，右側の置換から写像を考えるものとする．

$$\mu_1 \circ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

について*，$\mu_1 \circ \rho_1(1) = \mu_1(2) = 3, \mu_1 \circ \rho_1(2) = \mu_1(3) = 2, \mu_1 \circ \rho_1(3) = \mu_1(1) = 1$ であるから

$$\mu_1 \circ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mu_2$$

となる．一般に S_3 の元は可換ではない．例えば $\mu_1\rho_1 \neq \rho_1\mu_1$．

S_3 の単位元は恒等置換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ である．また，S_3 の元の逆元は上下を入れ替えればよい．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．S_3 の演算表は以下の通り．

	e	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
e	e	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	e	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	e	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	e	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	e	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	e

$A_3 := \{e, \rho_1, \rho_2\}$ †や $\{e, \mu_1\}, \{e, \mu_2\}, \{e, \mu_3\}$ は S_3 の部分群になっている． □

$i_1, i_2, \cdots, i_m$ を Ω の相異なる元とするとき，i_k を i_{k+1} $(k = 1, 2, \cdots, m-1)$ に移し，かつ i_m を i_1 に移す置換を $(i_1 i_2 \cdots i_m)$ とかき，**巡回置換**という．Ω の 2 元の巡回置換を互換といい，$1 \leqq i < j \leqq n$ の入れ替えを (ij) とかく．

一般に任意の (恒等置換以外の) 置換は，互いに共通の文字を動かさない巡回置換 (互いに素な巡回置換という) の積で表されることが知られている．

---

*以下，$\circ$ は省略する場合もある

†置換に符号というものを定義し，符号が $+1$ になる置換全体を集めたものとして，一般に交代群 A_n が定められる．A_n は S_n の部分群で，位数は $\frac{n!}{2}$(S_n の位数の半分) である．符号についてはこのシリーズの「07 対称群 S_3 の剰余類」の中で扱う．

(例) (2)S_6 の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ を互いに素な巡回置換の積で表すと，以下のようになる．

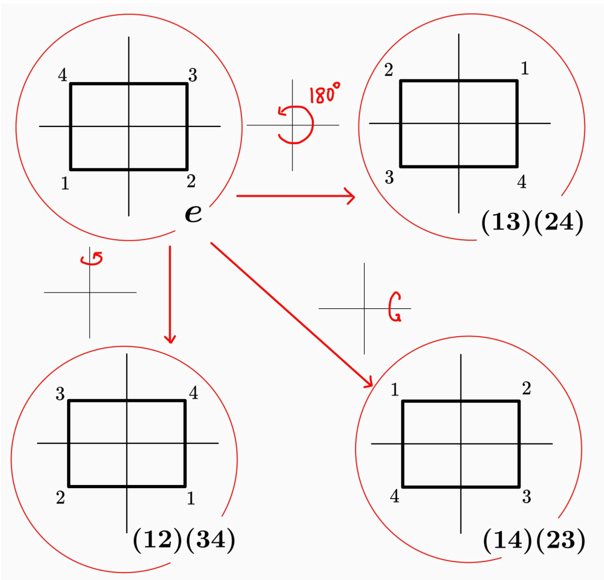
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (163)(45)$$

右辺は (45)(163) とかいても同じことである．一般に互いに素な巡回置換の積は可換である．
□

(例) (3) S_4 の部分集合

$$V_4 = \{e, (13)(24), (12)(34), (14)(23)\}$$

は，演算について閉じているため，定理 05 により群である．V_4 をクラインの四元群という．この群は、正方形ではない長方形 R について，以下の図のように R を R に移すような変換全体を表す．



□

〜演習問題〜

05-1 以下の置換を互いに素な巡回置換の積として表せ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

05-2 (1) 群 G の元 x について，$x^2 = e$ ならば $x = x^{-1}$ であることを示せ．

(2) 群 G のすべての元 x について $x^2 = e$ ならば G は可換群であることを示せ．

(05-1) (157)(2396) (05-2) $x \cdot x = e$ であるから逆元の定義により $x^{-1} = x$．(2) 任意の $x, y \in G$ について $xy = (y^{-1}x^{-1})^{-1} = (yx)^{-1} = yx$.