04 合成写像の性質

ゼロから始める群論 2020

定義 (写像)

2 つの集合 A, B において，集合 A の各元 a に対して集合 B の元 b がただ一つ定まるとき，この対応を，集合 A から集合 B への写像といい[*]，文字 f などを使って

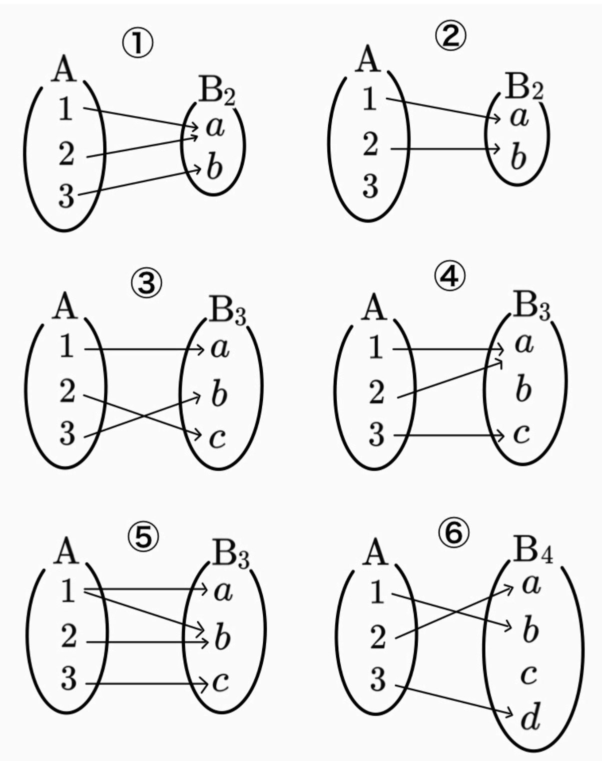
$f : A \to B$

あるいは

$f : a \longmapsto b, \quad f(a) = b$

のように表す. 集合 A を定義域，B を終域という.

(例)(1) $A = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{a, b\}, B_3 = \{a, b, c\}, B_4 = \{a, b, c, d\}$ とし，次のような A の元から B_2, B_3, B_4 の元への対応①〜⑥を考える.



上の対応において，②や⑤は写像ではなく，①, ③, ④, ⑥は写像である. □

2 つの写像の組合せで合成写像が定義される.

[*]集合 A, B が実数など数の集合のときは写像は関数ということが多い.

定義 (合成写像)

A, B, C を集合，$f : A \to B$，$g : B \to C$ を写像とする．このとき写像

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

を f と g の合成写像といい，$g \circ f$ と表す.

(例)(2) $A = B = C = \mathbb{R}$，写像 $f : A \to B, g : B \to C$ をそれぞれ $f(x) = 2x, g(x) = x^2$ とする．このとき

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2$

となる．この例からも分かるように，一般に $f \circ g \neq g \circ f$ である[*]. □

写像の性質として，単射・全射の定義をしておく.

定義 (単射・全射)

A, B を集合，$f : A \to B$ を写像とする.

(1) A の元 x, x' に対し，

$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$

であるとき，f は A から B への単射であるという[†].

(2) 集合

$f(A) := \{y \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$

を f による A の像という．$f(A) = B$ のとき，f は A から B への全射という[‡].

写像 f が全射かつ単射であるとき，f は A から B への全単射であるという.

(例)(3) 既出の例 (1) の写像①, ③, ④, ⑥について，

①は全射であるが単射ではない.

③は全単射である.

④は全射でも単射でもない.

[*]一般に，2 つの写像 f, g が等しいとは，f, g の定義域・終域がそれぞれ等しく，かつ，定義域の任意の元 x に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことをいう

[†]単射は「1 対 1 の写像」ともよばれる．また，単射の条件について対偶をとれば「$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$」となる．f の単射性を示す際にはよくこの形が使われる.

[‡]f が全射であることを，「f は A から B への上への写像」ともいう.

⑥は単射であるが全射ではない． □

単射性や全射性は合成写像にも遺伝する．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 05

(1) f, g が単射ならば，$g \circ f$ は単射である．
(2) f, g が全射ならば，$g \circ f$ は全射である．
(3) 写像 $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ に対して，

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

(証明) $f : A \to B$，$g : B \to C$ とする．
(1)A の 2 元 x, x' に対して $g(f(x)) = g(f(x'))$ とすれば g の単射性から $f(x) = f(x')$ となる．ここで f の単射性から $x = x'$ となる．よって $g \circ f$ は単射である．
(2) C の元 z を任意に一つとる．g が全射であるから，ある $y \in B$ が存在して $g(y) = z$ となる．ここで f が全射であるから，ある $x \in A$ が存在して $f(x) = y$ となる．よって $g(f(x)) = z$，すなわち $g \circ f(x) = z$ となるから $g \circ f$ は全射である．
(3) A の任意の元 x に対して，

$$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

また

$$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

であるから，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ となる．
□

～演習問題～

04-1 次の式によって定義された $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像について，そのグラフを考察して全射性・単射性を調べよ．
(1) $f_1(x) = x + 1$
(2) $f_2(x) = x^2$
(3) $f_3(x) = 2^x$

(04-1)(1) 全単射 (2) 全射でも単射でもない (3) 単射であるが全射ではない