03 部分群判定条件

ゼロから始める群論 2020

定理 03

G を群，$H(\neq \emptyset)$ がその部分集合であるとき，次の 3 条件は同値である．
(1) H は G の部分群
(2) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ かつ $a^{-1} \in H$
(3) $a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H$

(証明のポイント) (1) が成り立つ、すなわち H が G の部分群であれば，演算について閉じていて，任意の元 $a \in H$ の逆元 a^{-1} も H に存在するから (2) が成り立つ．また，H が (2) の条件を満たすとき，条件を組み合わせて (3) が導かれる．よって，H が (3) の性質をもつときに (1) の性質をもつことを示せばよい．
(証明) H が (3) の性質をもつと仮定して H が G の部分群であることを示ばよい．
まず $a \in H$ とすると (3) の条件で $b = a$ として $e = a^{-1}a \in H$ から H に単位元 e が存在する．
次に (3) の条件で $b = e$ として $a^{-1} = a^{-1}e \in H$ となる．よって任意の H の元 a の逆元 a^{-1} が H に存在する．
また，任意の 2 元 $a, b \in H$ に対して，a^{-1} と b に (3) の性質を用いることにより $ab = (a^{-1})^{-1}b \in H$ であるから，H は演算について閉じている．
また，H が G の部分集合であることから結合法則は明らかに成り立つ．以上のことから，H は G の部分群である． □

定理 03 により，群 G の部分集合 H が部分群かどうか判定するためには，任意の $a, b \in H$ で $a^{-1}b \in H$ が成り立つか確認すればよい．定理 03 からほぼ自動的に次の事実が導かれる．

系*

G を群，H_1, H_2 をその部分群とすると，その共通部分 $H_1 \cap H_2$ は G の部分群である．

(証明)$a, b \in H_1 \cap H_2$ とすると，H_1, H_2 が G の部分群であることから定理 03 により，$a^{-1}b \in H_1, a^{-1}b \in H_2$ となる．したがって $a^{-1}b \in H_1 \cap H_2$．よって再び定理 03 により，$H_1 \cap H_2$ は G の部分群となる． □

(例) (1) 集合
$$S = \{p + q\sqrt{2} | p, q \in \mathbb{Q}, p^2 + q^2 \neq 0\}$$
は乗法群 $\mathbb{R}^\times$ の部分群である．
(確認) 実際，$p + q\sqrt{2}, p' + q'\sqrt{2} \in S$ $p, p', q, q' \in \mathbb{Q}$ とすると $(p+q\sqrt{2})(p'+q'\sqrt{2}) = (pp'+2qq')+(pq'+p'q)\sqrt{2}$ および $(p+q\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{p - q\sqrt{2}}{p^2 - 2q^2} \in S$ であるから定理 03 の (2) の条件を満たすため，S は $\mathbb{R}^\times$ の部分群である． □

(例)(2) 群 G に対し，
$$Z(G) = \{a \in G | \forall g \in G, ag = ga\}$$
とおくと $Z(G)$ は G の部分群である．
(確認) まず，$e \in G$ であるから G は空ではない．また，$a, b \in Z(G)$ としたとき，任意の $g \in G$ に対して $(ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab)$ により $ab \in Z(G)$ となる．また，$ag^{-1} = g^{-1}a$ から $ga^{-1} = a^{-1}g$ となる (演習問題 01-3 の性質を使った) ので，$a^{-1} \in Z(G)$ となる．よって定理 03 の (2) が満たされるので，$Z(G)$ は G の部分群である． □

定理 04

G を群，$H(\neq \emptyset)$ がその有限部分集合†であるとき，H が G の部分群であるための必要十分条件は
(※) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$
である．

(証明) 条件 (※) を仮定したときに定理 03 の (2) が成り立つこと，すなわち $a \in H$ ならば $a^{-1} \in H$ であることを示せばよい．H から任意の元 a が H をとると，(※) により a のべき

*定理から容易に導かれる数学的主張を「系」と表現する．系もちろん，「系」のことを定理と表現しても差し支えはない．
†念のため補足．有限集合といったら，元の個数が有限である集合を意味する．

の列

$a, a^2, a^3, \cdots$

はすべて H に属する．ここで，H は有限集合であるから，ある自然数 (正の整数)m, n で

$a^m = a^n \ (m > n)$

となるものが存在する．これを書き換えると

$a^{m-n-1} \cdot a = e \ \ (m-n-1 \geqq 0)$ …①

となる．もし $m-n-1=0$ ならば $a = e \in H$ であり，単位元の逆元は自分自身であるから，$a^{-1} = e^{-1} = e \in H$ となる． また，$m-n+1 > 0$ ならば①および $a^{\text{自然数}}$ の形の元が H に属することから $a^{-1} = a^{m-n-1} \in H$ となる． □

～演習問題～

03-1 G を可換群とするとき，次を示せ．

(1) 任意の $a, b \in G$ に対して $(ab)^3 = a^3 b^3$ となる．

(2) 集合 $G_{(3)} = \{x \in G | x^3 = e\}$ は G の部分群である．

03-2 可換群でない群 G は非自明な部分群 (すなわち $\{e\}$ や G 以外の部分群) をもつことを示せ．

(03-1)(1)$ab = ba$ であるから，$(ab)^3 = ababab = aabbab = aababb = aaabbb = a^3b^3$ (2) $e \in G_{(3)}$ であるから $G_{(3)}$ は空ではない．$a, b \in G_{(3)}$ とすると，$(a^{-1}b)^3 = (a^3)^{-1}b^3 = e^{-1}e = e$ により $a^{-1}b \in G_{(3)}$ となる．定理 03 の (3) が満たされるので $G_{(3)}$ は G の部分群である． (02-2) G は可換群ではないから，単位元以外の元 a が存在する．a から生成される群 $< a >$ は G の部分群である．$< a >$ は G と異なる (もし $< a >= G$ なら G が可換群であることになり仮定に反する) から G の自明でない部分群である．