00 準備

ゼロから始める群論 2020

集合

範囲がはっきりしたものの集まりを**集合**といい，集合を構成している１つ１つのものを，その集合の**元**または要素という．

集合に関する約束事をいくつか述べる．

(1) a が集合 A の元であるとき，a は A に属する, あるいは A は a を含むといい, 記号で $a \in A$ のように表す．集合 A, B について，A の元がすべて B の元でもあるとき，A は B の部分集合であるといい，$A \subset B$ のように表す．

(2) 集合 A の元の個数が有限のとき，A の元の個数を $|A|$ と表す．

(3) 要素が１つも無い集まりも集合と考え、これを空集合といい，$\varnothing$ と表す．空集合は任意の集合の部分集合とする．

(4) 集合 A のすべての元が集合 B の要素であり，また，集合 B の要素が A の要素でもあるとき集合 A, B は等しいといい，$A = B$ と表す．$A = B$ を示すためには，$A \subset B$ および $A \supset B$ を示せばよい．

命題

正しいか正しくないかがはっきり決まる事柄を述べた文や式を**命題**という．命題が正しいとき真であるといい，正しくないときは偽という．
変数を含む文や式は**条件**という．条件を考える場合には，あらかじめ変数の範囲をなんらかの集合で考えておくことが多い．

多くの命題は，複数の条件を組合せて表現される．いくつか述べる．以下，p, q は条件とする．

(1)「p または q」は，p と q の少なくともどちらか一方が成り立つことを主張する条件である．

(2)「p かつ q」は，p と q の両方が成り立つことを主張する条件である．

(3)「p ではない」という条件は p の否定といい，$\overline{p}$ と表す．

(4)「p ならば q」は p が成り立つときはいつでも必ず q も正しいことを主張する命題であり，「$p \Rightarrow q$」と表す．

(5)「$p \Leftrightarrow q$」は，「p ならば q」と「q ならば p」がともに正しいことを主張する命題である．

(6) 命題「$p \Rightarrow q$」に対し，命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」を命題「$p \Rightarrow q$」の対偶という．対偶ともとの命題の真偽は一致する．

命題は「任意の x に対して〜」*や「ある x が存在して〜」の形で述べられることが多い．

「任意の x に対して〜」という形の命題は，all あるいは any の頭文字の大文字 A を逆さにした全称記号「$\forall$」を使って次のように簡潔に表現できる．

全称命題

「任意の x に対して，$p(x)$ となる」
という命題は，x がとりうる範囲の集合 U を明示して，
「$\forall x \in U,\ p(x)$」
のように表すことが多い†．

「ある x が存在して〜」という形の命題は，exist の頭文字の大文字 E を左右逆にした存在記号「$\exists$」を使って次のように簡潔に表現できる．

存在命題

「ある x が存在して，$p(x)$ となる」
という命題は，x が属する集合 U を明示して，
「$\exists x \in U,\ p(x)$」
あるいは
「$\exists x \in U$ s.t. $p(x)$」
のように表すことが多い‡．

*「任意の x に対して〜」は「どのような x に対しても〜」や「すべての x に対して〜」と同じ意味．

†カンマ「,」の代わりにセミコロン「;」を使う場合もある．

‡「s.t.」は「such that」の略である．また，カンマ「,」の代わりにセミコロン「;」を使う場合もある．

(例) (1) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とする．「どんな整数 a,b に対しても $a+b=b+a$ が成り立つ」という主張は，

$\forall a,b\in\mathbb{Z}, a+b=b+a$

と表すことができる[*]．なお，これは (もちろん) 真の命題である． □

(2) 有理数全体の集合から 0 を除いた集合を $\mathbb{Q}^\times$ とする．「0 以外のどんな有理数 r についても，$rs=1$ となる有理数 s が存在する」という主張は，

$\forall r\in\mathbb{Q}^\times, \exists s\in\mathbb{Q}^\times,\ rs=1$

と表すことができる．なお，この主張は真である ($s=\frac{1}{r}$ とすればよい)． □

(3) 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．「ある実数 e が存在し，任意の実数 x に対して $ex=xe=x$ となる」という主張は，

$\exists e\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, ex=xe=x$

と表すことができる．なお，この主張は真である ($e=1$ とすればよい)． □

なお，このシリーズでは慣習に従い，正の整数 (自然数) 全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$，実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表すことにする (特に記号の説明をしない場合もあるので，慣れていない人は早めに慣れておくこと)．

補足 新しい記号を定義する際には，「:=」という記法を使う．「$A:=B$」は A(という新しい記号) を (すでに意味が確定している)B として定義する，という意味になる．

例えば上の例で登場した「有理数全体の集合から 0 を除いた集合を $\mathbb{Q}^\times$ とする」という記述は

$\mathbb{Q}^\times := \{r\in\mathbb{Q} | r\neq 0\}$

のように簡潔に表すことができる．

〜演習問題〜

00-1 正の整数 (自然数) 全体の集合を $\mathbb{N}$ とする．下の命題 (1)，(2) の真偽をそれぞれ答えよ．

(1) $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N},\ x<y$

(2) $\exists y\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{N},\ x<y$

00-2 次の命題の真偽をそれぞれ答えよ．ただし $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．

(1) $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+b\in\mathbb{Z}$

(2) $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\div b\in\mathbb{Z}$

00-3 次の条件を全称記号 ($\forall$) や存在記号 ($\exists$) を用いて表せ．また，全称記号・存在記号を用いない同値な条件をかけ．

(1)「x の 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもつ．」

(2)「どんな実数 x に対しても $x^2+bx+c>0$ となる．」

---

[*] この他にも例えば「$a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+b=b+a$」とも表現できる．

(00-1)(1) 真 (2) 偽 (00-2) (1) 真 (2) 偽 (00-3) (1)「$\exists x\in\mathbb{R}, x^2+bx+c=0$」など．これは $b^2-4c\geqq 0$ と同値である． (2)「$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+bx+c>0$」など．これは $b^2-4c<0$ と同値である．